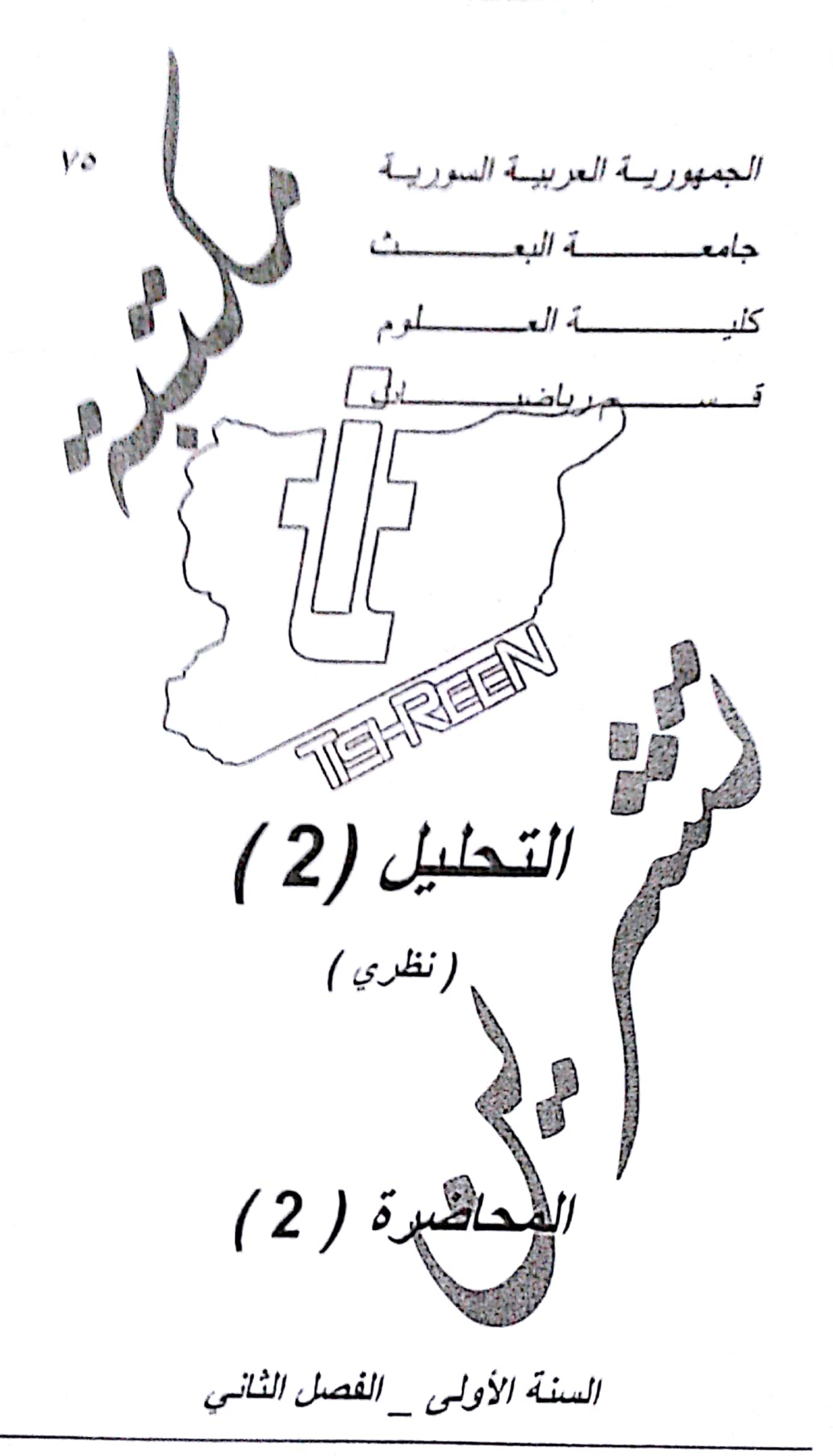
الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم
قسم رياضيات



التحليل (2)

(نظري)

المحاضرة (2)

السنة الأولى _ الفصل الثاني

المحاضرة النظرية الثانية

سننتقل في هذه المحاضرة إلى دراسة طرق إيجاد التكامل

طرق إيجاد التكامل:

* الطريقة تغيير المتحول (التعويض): عندما نريد حساب تكامل لا يمكن الوصول إلى جدول التكاملات مباشرة أحياناً يكون لتبسيط التكامل فرضية بأن نفرض المتحول الموجود بالتكامل (x) هو عبارة عن تابع جديد لـ t وهو $\varphi(t)$ بشرط أن يكون التابع قابل للاشتقاق ومشتقه مستمر نعوض بدل x بالتابع الجديد مثلاً فرضنا $x = \sin t$ نعوضه بالتكامل وبعد التعويض نعود للشكل الأساسي ونعوض قيمة t في الناتج إذاً نستنتج من ذلك

* الطريقة: يمكن تغيير المتحول x بالتكامل غير المحدد $\int f(x)\,dx$ إلى متحول جديد بوضع $x = \varphi(t)$ أي أن x هي تابع لـ t بشرط أن يكون التابع قابل للاشتقاق ومشتقه مستمر ويملك تابع عكسي φ^{-1}

<u>مثال</u> $x = \sin t$ ← التابع العكسي $t = \arcsin x$

$\sin t$ قابل للاشتقاق ومشتقه مستمر

وأيضاً $d(x) = \varphi'(x)\,dt$

وبعد حساب التكامل نعود إلى المتحول x

ويمكن أيضاً أن نفرض أن $t = \varphi(x)$ أن t هو تابع لـ x ويكون $dF = f\,dx$

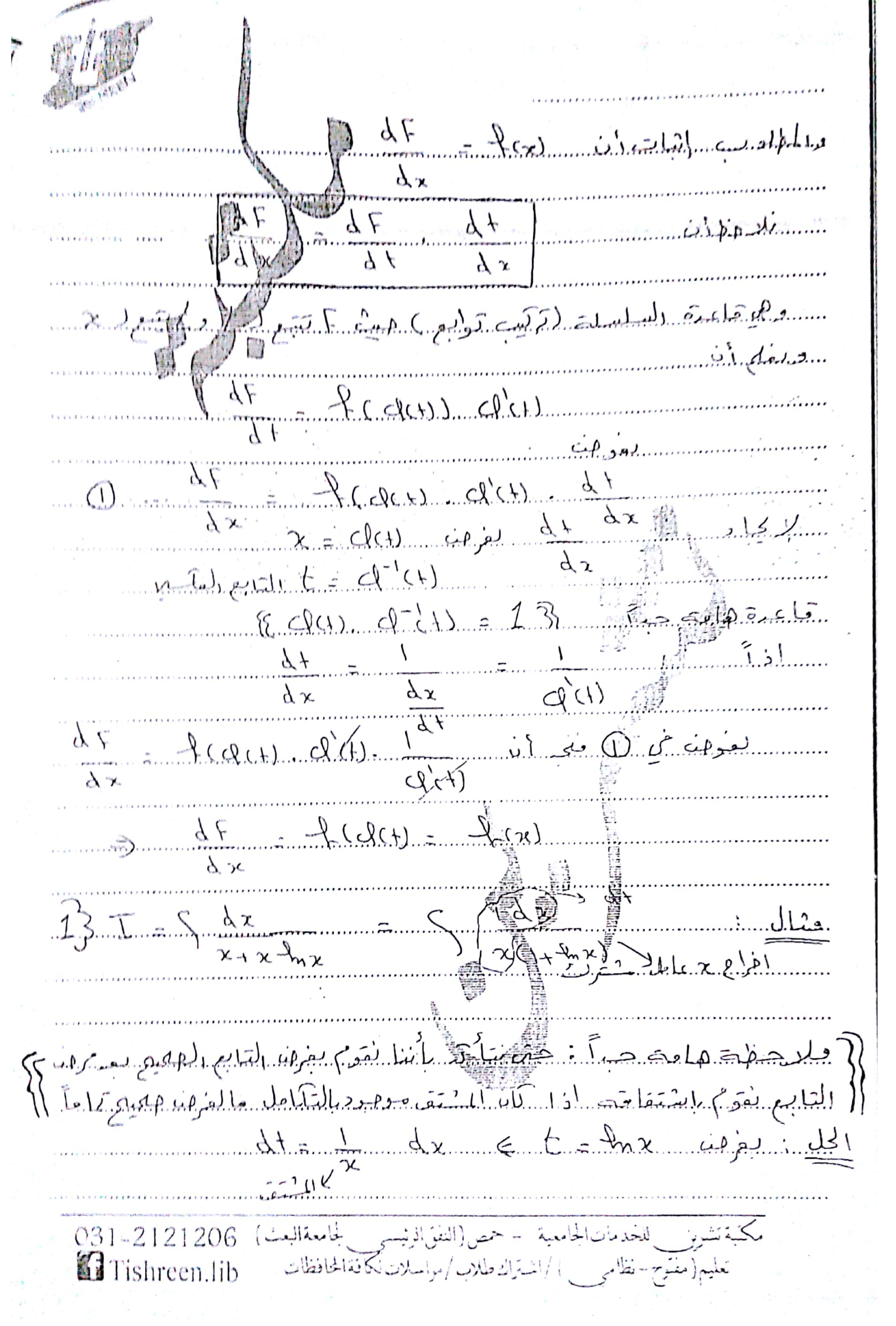
$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi' t \, d \quad ①$$

نبدل x بـ $\varphi(t)$ ولدينا أيضاً $dx = \varphi' t\, dt$

لنفرض أن F هو التابع الأصلي الناتج عن التكامل في الطرف الأيمن أي

$$\frac{dF}{dt} = f(\varphi(t))\ \varphi'(t)$$

مشتق التابع الأصلي بالنسبة لـ t



والمطلوب إثبات أن $\frac{dF}{dx} = f(x)$

نلاحظ أن $\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

وهي قاعدة السلسلة (تركيب توابع) حيث F تتبع لـ t وتتبع لـ x ونعلم أن

$$\frac{dF}{dt} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

بتعويض

$$① \quad \frac{dF}{dx} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

لإيجاد $\frac{dt}{dx}$ بفرض $x = \varphi(t)$

$t = \varphi^{-1}(t)$ التابع العكسي

قاعدة هامة جداً $\{\varphi(t) \cdot \varphi^{-1}(t) = 1\}$

اذاً $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{\varphi'(t)}$

بتعويض في ① نجد أن $\frac{dF}{dx} = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)}$

$$\Rightarrow \frac{dF}{dx} = f(\varphi(t)) = f(x)$$

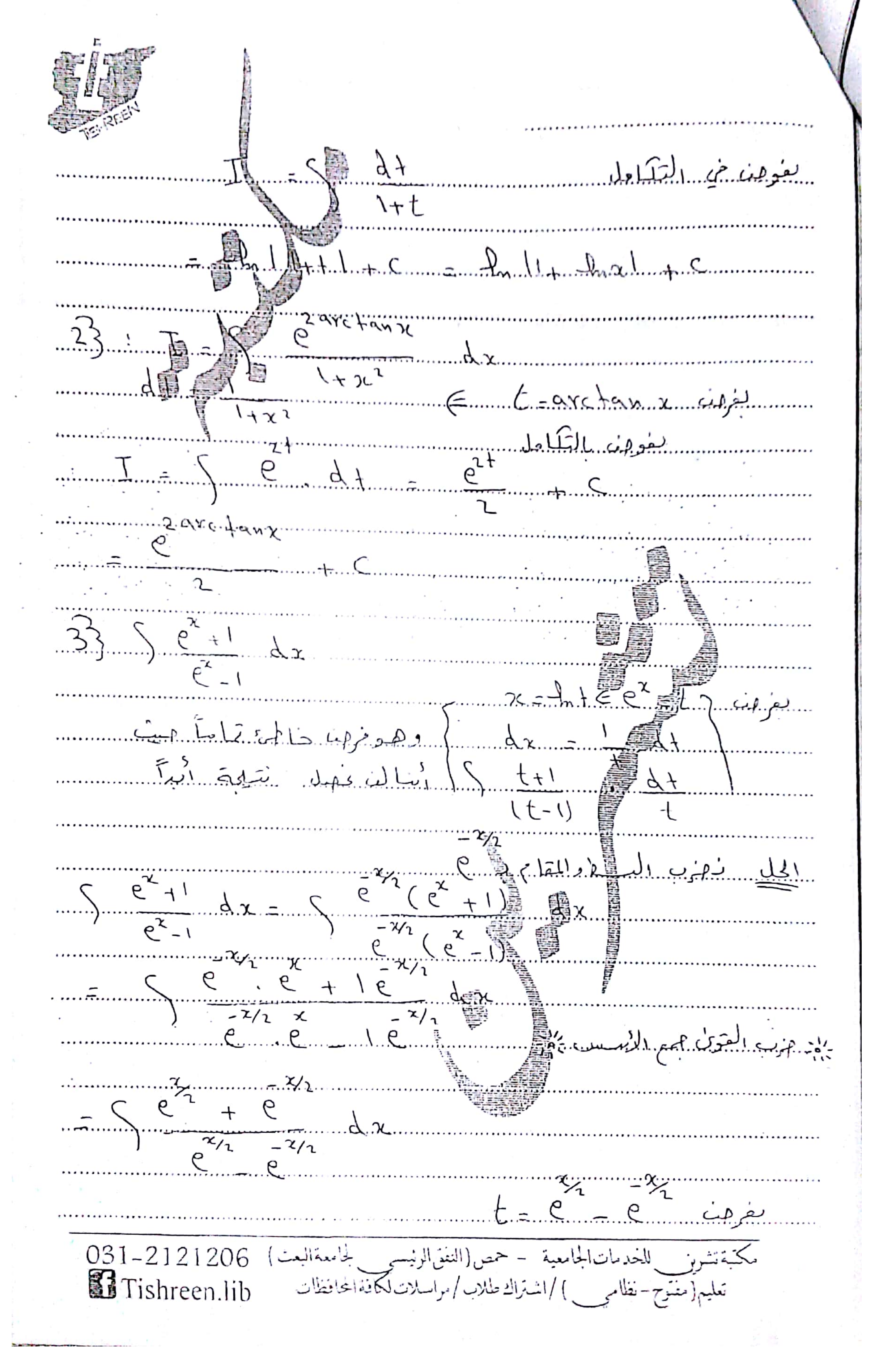
مثال: $1\} \ I = \int \frac{dx}{x + x\ln x} = \int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

اخراج x عامل مشترك

ملاحظة هامة جداً: حتى نتأكد بأننا نقوم بفرض التابع الصحيح بعد فرض التابع نقوم باشتقاقه اذا كان المشتق موجود بالتكامل فالفرض صحيح تماماً

الحل: بفرض $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx$

المشتق



نعوض في التكامل $I = \int \frac{dt}{1+t}$

$= \ln|1+t| + c = \ln|1+\ln x| + c$

3} : $I = \int \frac{e^{2\arctan x}}{1+x^2}\, dx$

نفرض $t = \arctan x \Leftarrow dt = \frac{1}{1+x^2}$

نعوض بالتكامل

$I = \int e^{2t}\, dt = \frac{e^{2t}}{2} + c$

$= \frac{e^{2\arctan x}}{2} + c$

3} $\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\, dx$

نفرض $x = \ln t \Leftarrow e^x = t$

$dx = \frac{1}{t}\, dt$

$\int \frac{t+1}{(t-1)} \frac{dt}{t}$

وهو فرض خاطئ تماماً حيث أننا لن نصل نتيجة أبداً

الحل: نضرب البسط والمقام بـ $e^{-x/2}$

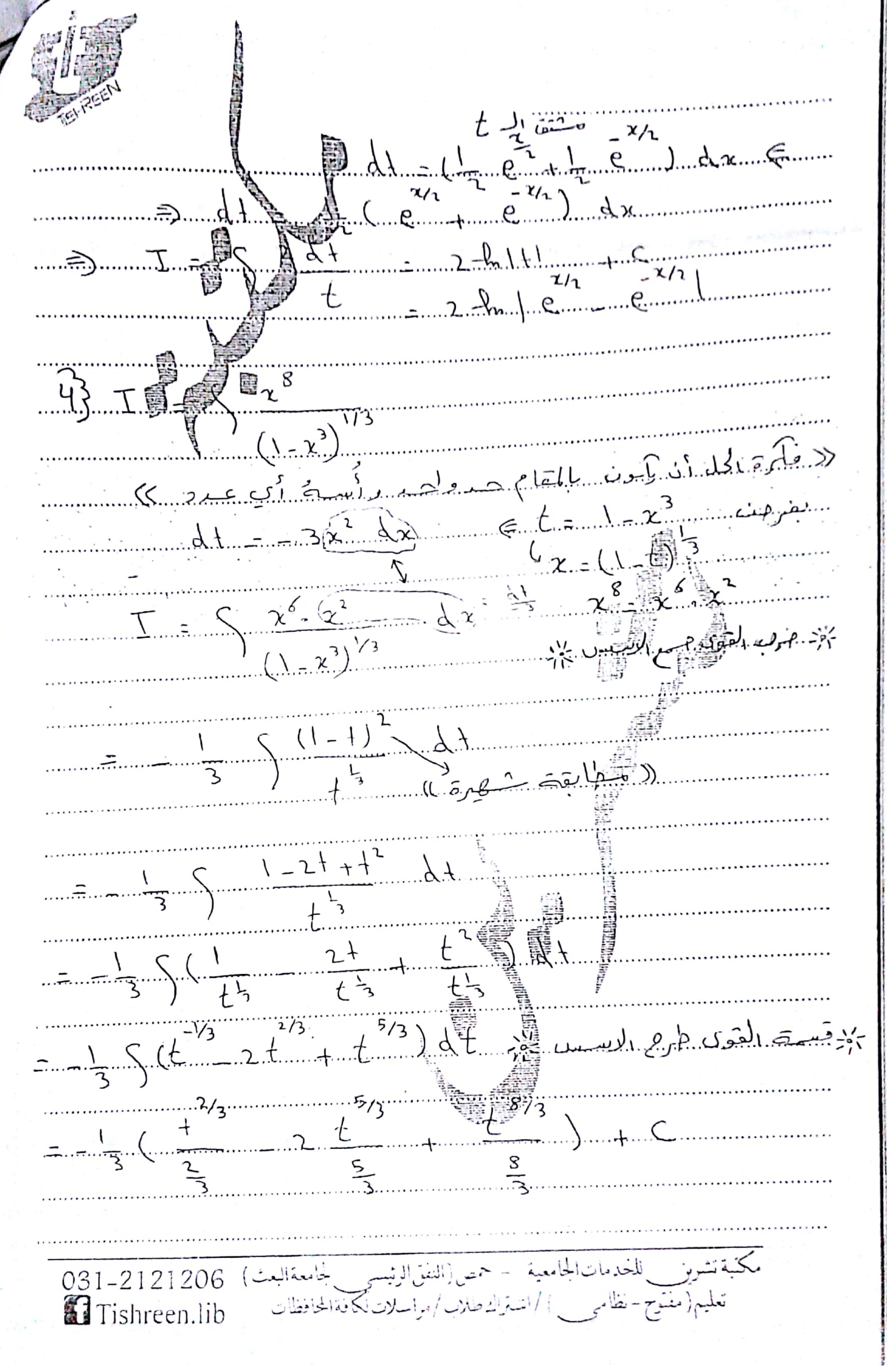
$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\, dx = \int \frac{e^{-x/2}(e^x+1)}{e^{-x/2}(e^x-1)}\, dx$

$= \int \frac{e^{-x/2}.e^x + 1e^{-x/2}}{e^{-x/2}.e^x - 1e^{-x/2}}\, dx$

ضرب القوى: نجمع الأسس

$= \int \frac{e^{x/2}+e^{-x/2}}{e^{x/2}-e^{-x/2}}\, dx$

نفرض $t = e^{x/2} - e^{-x/2}$



t مشتق الـ

$$dt = \left(\frac{1}{2}e^{x/2} + \frac{1}{2}e^{-x/2}\right)dx \Leftarrow$$

$$\Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right)dx$$

$$\Rightarrow I = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln|t| + c$$
$$= 2\ln\left|e^{x/2} - e^{-x/2}\right|$$

4} $I = \int \frac{x^8}{(1-x^3)^{1/3}}$

« فكرة الحل أن يكون بالمقام حد واحد وأسه أي عدد »

نفرض $t = 1 - x^3 \Leftarrow dt = -3x^2\,dx$

$x = (1-t)^{\frac{1}{3}}$

$$I = \int \frac{x^6 \cdot x^2}{(1-x^3)^{1/3}}\,dx \quad \frac{dt}{-3} \qquad x^8 = x^6 \cdot x^2$$

※ ضرب القوى جمع الأسس ※

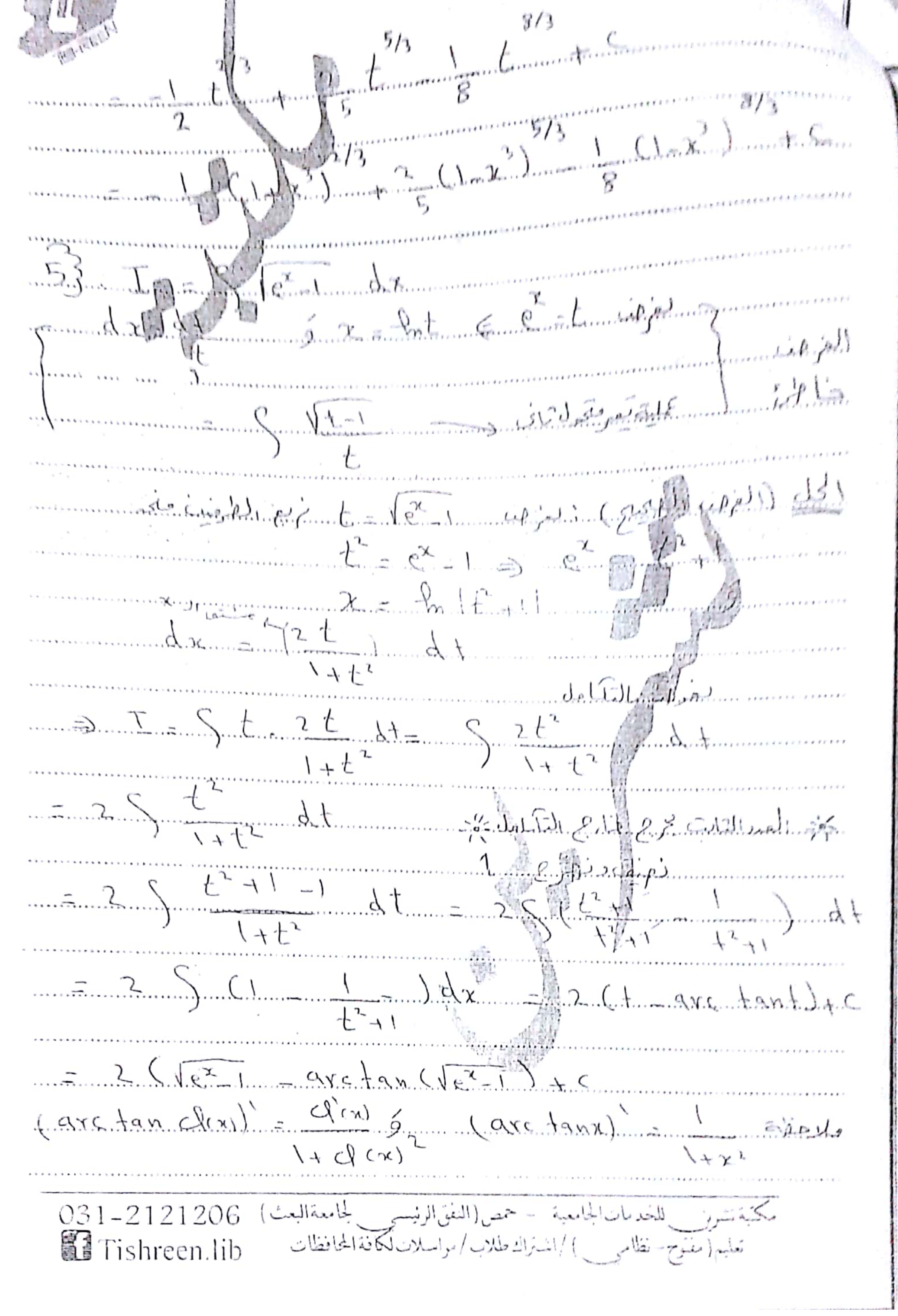
$$= -\frac{1}{3}\int \frac{(1-t)^2}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt$$ «مطابقة شهيرة»

$$= -\frac{1}{3}\int \frac{1-2t+t^2}{t^{\frac{1}{3}}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{2t}{t^{\frac{1}{3}}} + \frac{t^2}{t^{\frac{1}{3}}}\right)dt$$

$$= -\frac{1}{3}\int\left(t^{-1/3} - 2t^{2/3} + t^{5/3}\right)dt$$ ※ قسمة القوى طرح الأسس ※

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} - 2\frac{t^{5/3}}{\frac{5}{3}} + \frac{t^{8/3}}{\frac{8}{3}}\right) + c$$



$$= \frac{1}{2} t^{2/3} + \frac{2}{5} t^{5/3} - \frac{1}{8} t^{8/3} + c$$

$$= \frac{1}{2}(1+x^3)^{2/3} + \frac{2}{5}(1+x^3)^{5/3} - \frac{1}{8}(1+x^3)^{8/3} + c$$

5) $I = \int \sqrt{e^x - 1}\, dx$

نعوض $e^x = t \Leftarrow x = \ln t$ و $dx = \frac{1}{t}\, dt$ — التعويض خاطئ

$= \int \frac{\sqrt{t-1}}{t}$ ⟵ عادة تغيير متحول ثاني

الحل (التعويض الصحيح): نعوض $t = \sqrt{e^x - 1}$ نزيل الجذر منه

$$t^2 = e^x - 1 \Rightarrow e^x = t^2 + 1$$

$$x = \ln |t^2 + 1|$$

$$dx = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right) dt$$

نعوض بالتكامل

$$\Rightarrow I = \int t \cdot \frac{2t}{1+t^2}\, dt = \int \frac{2t^2}{1+t^2}\, dt$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt$$

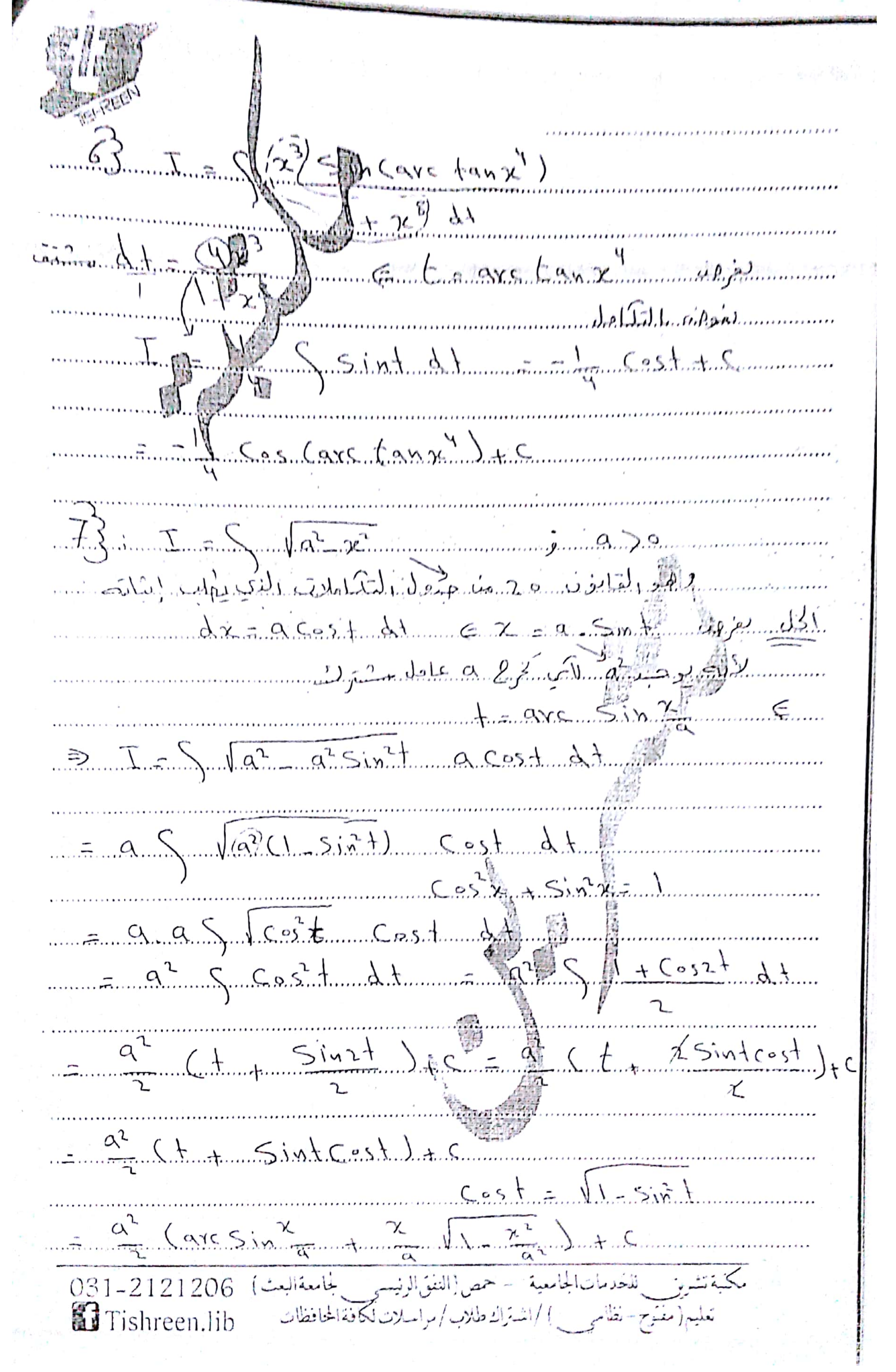
※ المسألة تحرج خارج التكامل ※ نضيف ونطرح 1

$$= 2\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\, dt = 2\int \left(\frac{t^2+1}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\right) dt$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dx = 2(t - \arctan t) + c$$

$$= 2\left(\sqrt{e^x - 1} - \arctan(\sqrt{e^x - 1})\right) + c$$

ملاحظة: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ و $(\arctan g(x))' = \frac{g'(x)}{1+g(x)^2}$



6} $I = \int \frac{x^3 \sin(\arctan x^4)}{1 + x^8}\, dx$

مشتق $\frac{dt}{1} = \frac{4x^3}{1+x^8}$ ⇐ $t = \arctan x^4$ نفرض

نعوض بالتكامل

$I = \frac{1}{4} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{4} \cos t + c$

$= -\frac{1}{4} \cos(\arctan x^4) + c$

7} : $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}$ ، $a > 0$

وهو القانون ٢٥ من جدول التكاملات الذي يطلب إثباته

الحل نفرض $x = a \sin t$ ⇐ $dx = a \cos t \, dt$

لأنه يوجد a^2 لكي تخرج a عامل مشترك

⇐ $t = \arcsin \frac{x}{a}$

$\Rightarrow I = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\; a \cos t \, dt$

$= a \int \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 t)}\; \cos t \, dt$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$= a \cdot a \int \sqrt{\cos^2 t}\; \cos t \, dt$

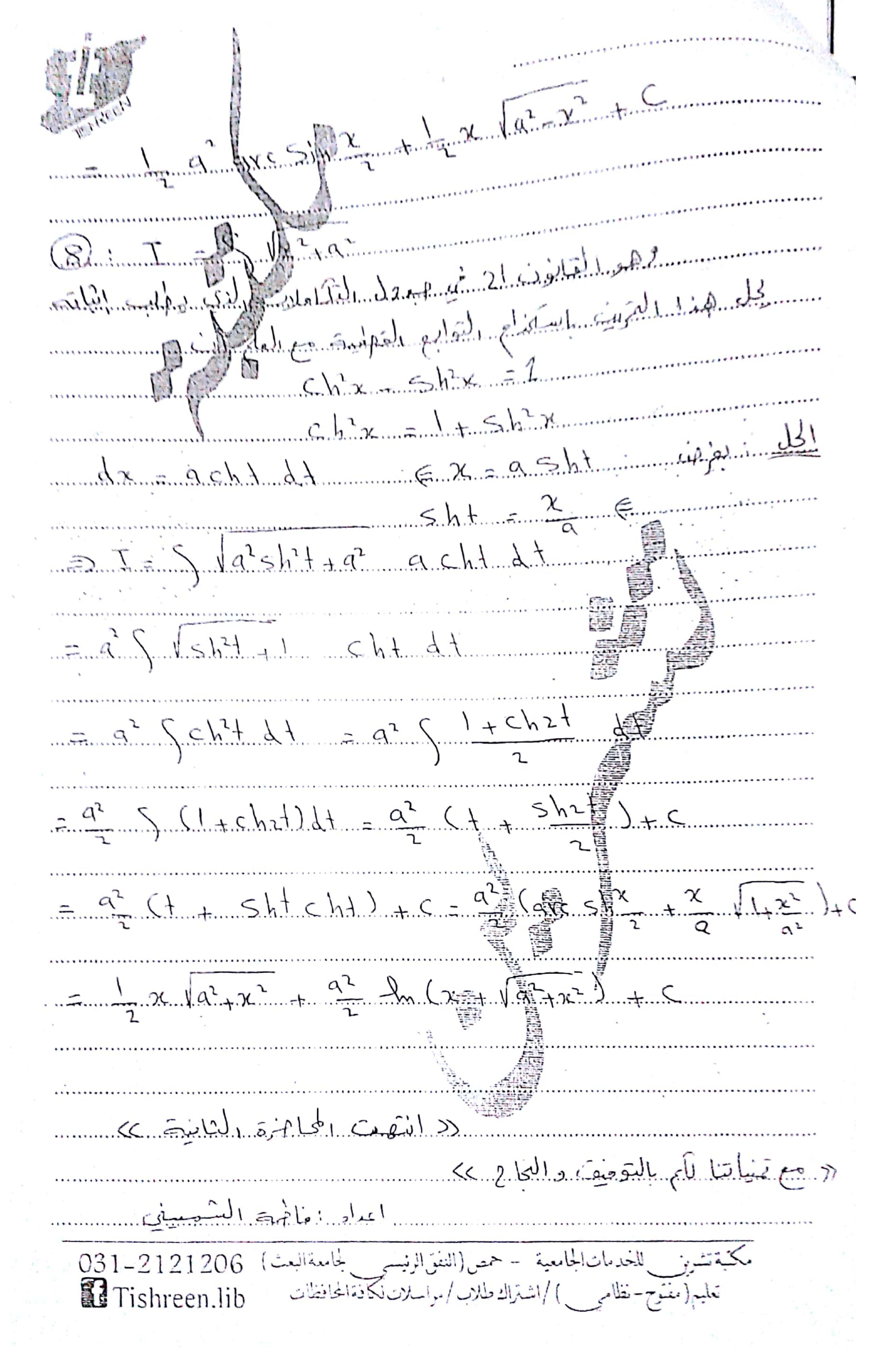
$= a^2 \int \cos^2 t \, dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt$

$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + c = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{2 \sin t \cos t}{2}\right) + c$

$= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + c$

$\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$

$= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right) + c$



$= \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + c$

⑧ : $I = \int \sqrt{x^2+a^2}$

وهو القانون 21 في جدول التكاملات الذي يطلب إثباته

يحل هذا التمرين باستخدام التوابع القطعية مع العلاقات

$ch^2x - sh^2x = 1$

$ch^2x = 1 + sh^2x$

الحل: نفرض $x = a\,sh\,t \Rightarrow dx = a\,ch\,t\,dt$

$\Rightarrow sh\,t = \frac{x}{a}$

$\Rightarrow I = \int \sqrt{a^2sh^2t + a^2}\;a\,ch\,t\,dt$

$= a^2 \int \sqrt{sh^2t + 1}\;ch\,t\,dt$

$= a^2 \int ch^2t\,dt = a^2 \int \frac{1+ch\,2t}{2}\,dt$

$= \frac{a^2}{2}\int (1 + ch\,2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{sh\,2t}{2}\right) + c$

$= \frac{a^2}{2}(t + sh\,t\,ch\,t) + c = \frac{a^2}{2}\left(\text{arc sh}\frac{x}{2} + \frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\right) + c$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + c$

« انتهت المحاضرة الثانية »

« مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح »

اعداد: فاطمة الشيباني